Теорема Фрейда о сопряженном функторе

Bartosz Milewski

Перевод:
Геннадий Чернышев
(https://henrychern.wordpress.com/)

Один из приемов детективных фильмов — это почти чудесная способность восстанавливать изображение по размытой фотографии. Вы просто сканируете картинку, говорите «улучшить!», И вуаля, на экране вашего компьютера появляется лицо подозреваемого или регистрационный номер его машины.

Компьютер, улучшай!

Благодаря постоянному совершенствованию глубокого обучения мы, возможно, в конечном итоге добьемся этого. Однако в теории категорий мы делаем это постоянно. Восстанавливаем утерянную информацию. Процедура основана на основном принципе теории категорий: объект определяется своими взаимодействиями с остальным миром. Это основа всех универсальных конструкций, леммы Йонеды, расслоения Гротендика, расширений Кана и практически всего остального.

Ярким примером является построение левого сопряженного с данным функтором, и это то, что мы собираемся здесь исследовать. Но сначала позвольте объяснить, почему я решил выбрать эту тему и как она связана с программированием. Я хотел написать в блоге сообщение о CPS (стиль передачи продолжения) и дефункционализации, но наткнулся на статью в nLab, в которой дефункционализация была связана с теоремой Фрейда о сопряженном функторе; в частности, с условием семейства решений. Такая неожиданная связь пробудила мой интерес, и я решил разобраться в ней глубже.

Сопряжения

Рассмотрим функтор R от одной категории $\mathcal{D}$ к другой категории $\mathcal{C}$.

$$R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

Функтор, как правило, теряет некоторую информацию, поэтому обычно его невозможно инвертировать. Он создает «размытое» изображение $\mathcal{D}$ внутри $\mathcal{C}$. Его левый сопряженный элемент является функтором от $\mathcal{C}$ к $\mathcal{D}$

$$L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

который пытается восстановить потерянную информацию в меру своих возможностей. Часто функтор R является забывающим, что означает, что он намеренно забывает некоторую информацию. Его левое сопряжение тогда называется свободным, потому что оно вольно импровизирует забытую информацию.

Конечно, это не всегда возможно, но при определенных условиях такое левое сопряжение существует. Эти условия изложены в общей теореме Фрейда о сопряженных функторах.

Чтобы понять их, мы должны немного поговорить о проблемах, связанных с размером категорий.

Проблемы с размером

Много интересных категорий являются большими. Это означает, что в категории так много объектов, что они точно не составляют множество. Категория всех множеств, например, большая (нет существует множества всех множеств). Также возможно, что морфизмы между двумя объектами не образуют множество.

Категория, в которой объекты образуют множество, называется *малой*, а категория, в которой hom-множества являются множествами, называется *локально малой*.

Многие сложности в теореме Фрейда связаны с проблемами размера, поэтому важно точно сформулировать все предположения.

Мы предполагаем, что источник функтора R, категория $\mathcal{D}$, локально мал. Эта категория также должна быть малой полной, то есть каждая малая диаграмма в $\mathcal{D}$ должна иметь предел (малая диаграмма — это функтор от малой категории). Также необходимо, чтобы функтор R был непрерывным, то есть сохранял все малые пределы.

Если бы не проблемы с размером, этого было бы достаточно, чтобы гарантировать существование левого сопряженного, и сначала мы дадим набросок доказательства для этого упрощенного случая. В общем случае существует еще одно условие — условие семейства решений, о котором мы поговорим позже.

Левый сопряженный и категория запятой

Проблема, которую мы пытаемся решить, заключается в следующем. Имеется функтор R, который отображает объекты и морфизмы от $\mathcal{D}$ к $\mathcal{C}$. Надо определить другой функтор L, идущий в противоположном направлении. Мы не ищем обратного, поэтому не ожидаем, что композиция этого функтора с R будет тождественностью, но хотим, чтобы она была связана с идентичностью двумя естественными преобразованиями, называемыми единицей и коединицей. Их составляющими являются соответственно:

$$\eta_c : c \to RLc$$
$$\epsilon_d : LRd \to d$$

и, пока они удовлетворяют некоторым дополнительным тождествам треугольника, они будут устанавливать сопряжение $L \dashv R$.

Мы собираемся определить L поточечно, поэтому выберем объект c в $\mathcal{C}$ и попробуем распространить его к $\mathcal{D}$. Для этого надо собрать как можно больше информации о c. Мы передадим всю эту информацию в $\mathcal{D}$, где найдем объект, который «выглядит так же». Можно думать об этом, как о создании голограммы c и отправке ее в $\mathcal{D}$.

Вся информация о c закодирована в морфизмах, поэтому для создания нашей голограммы мы соберем все морфизмы, начинающиеся в c. Эти морфизмы образуют категорию, называемую категорией *ко-срезов* c/C.

Объекты в c/C — это пары $(x, f\colon c \to x)$. Другими словами, это все стрелки, исходящие из с, проиндексированные их целевыми объектами x. Но, что действительно определяет структуру этой категории, так это морфизмы между этими стрелками. Морфизм в c/C от (x, f) к (y, g) — это морфизм $h\colon x \to y$, который делает следующий треугольник коммутативным:

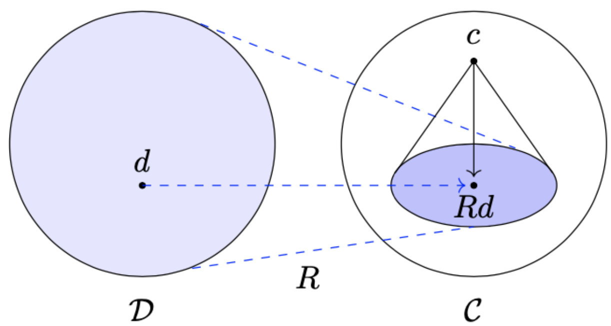
$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[rr, "h"'] & & y \end{tikzcd}$$

Теперь у нас есть полная информация о c, закодированная в категории срезов, но нет способа передать ее в $\mathcal{D}$. Это потому, что, как правило, образ $\mathcal{D}$ не покрывает всю категорию $\mathcal{C}$. Что еще более важно, не все морфизмы в $\mathcal{C}$ имеют соответствующие морфизмы в $\mathcal{D}$. Мы должны уменьшить свои ожидания и определить частичную голограмму, которая охватывает не всю информацию о c, а только ту часть, которую можно распространить на $\mathcal{D}$ с помощью функтора R. Такая частичная голограмма называется категорией запятой c/R.

Объекты c/R — это пары $(d, f\colon c \to Rd)$, где d — объект в $\mathcal{D}$. Другими словами, это все стрелки, исходящие из c, цель которых находится в образе R. Опять же, важная структура закодирована в морфизмах c/R. Это стрелки в $\mathcal{D}$, $h\colon d \to d'$, которые превращают следующую диаграмму в коммутативную в категории $\mathcal{C}$

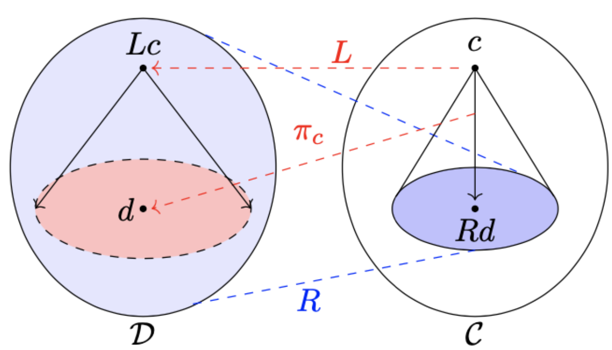
$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Rd \arrow[rr, "Rh"'] & & Rd'
\end{tikzcd}$$

Обратите внимание на интересный факт: мы можем интерпретировать эти треугольники как условия коммутации в конусе, вершина которого есть c, а основание образовано объектами и морфизмами в образе R. Но не все объекты или морфизмы включены в образ R, а только те морфизмы, которые заставляют соответствующий треугольник быть коммутативным — и это как раз те морфизмы, которые удовлетворяют условию конуса. Таким образом, категория запятой образует конус в $\mathcal{C}$.



Построение предела

Теперь всю эту информацию о c, которая была закодирована в c/R, можно переместить в $\mathcal{D}$. Мы определяем функтор проекции $\pi_c \colon c/R \to D$, который отображает (d, f) к d, забывая, таким образом, морфизм f. Однако важно то, что этот функтор хранит информацию, закодированную в морфизмах c/R, потому что это морфизмы в $\mathcal{D}$.



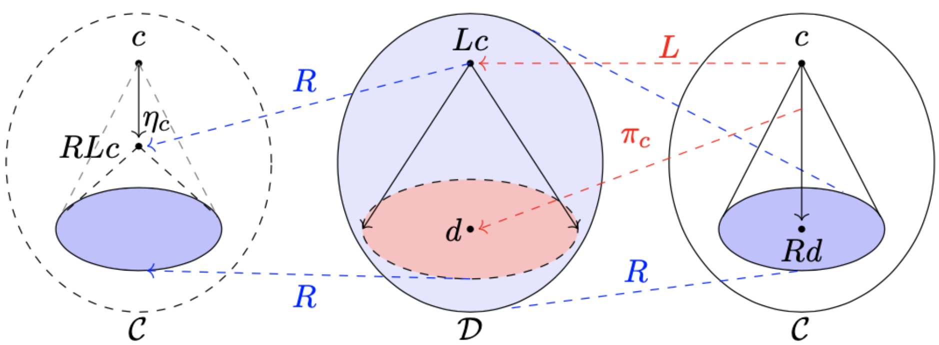
Образ π_c не обязательно покрывает всю категорию $\mathcal{D}$, потому что не на каждом Rd есть стрелки, идущие от c. Аналогично, только некоторые морфизмы (те, которые делают соответствующий треугольник в $\mathcal{C}$ коммутативным) выбираются с помощью π_c. Но те объекты и морфизмы, которые имеются в образе π_c, образуют диаграмму в $\mathcal{C}$. Эта диаграмма является нашей частичной голограммой, и ее можно использовать для выбора объект в $\mathcal{D}$, который выглядит почти так же, как c. Такой объект является пределом этой диаграммы. Мы выбираем предел этой диаграммы в качестве определения Lc: левый сопряженный к R, действующий на c.

А теперь сложная часть: мы предположили, что категория $\mathcal{D}$ была малой полной, поэтому каждая малая диаграмма имеет предел; но диаграмма, определяемая π_c, не обязательно мала. Давайте на мгновение проигнорируем эту проблему и продолжим набросок доказательства. Мы хотим показать, что отображение, которое назначает предел π_c каждому c, является левым сопряженным к R.

Посмотрим, можно ли определить единицу сопряжения:

$$\eta_c : c \to RLc$$

Поскольку мы определили Lc как предел диаграммы π_c, а R сохраняет пределы (на самом деле, малые пределы, но мы пока игнорируем проблемы размера), то RLc должен быть пределом диаграммы $R\pi_c$ в $\mathcal{C}$. Но, как отмечалось ранее, диаграмма $R\pi_c$ — это в точности основание конуса с вершиной c, которая использовалась для определения категории запятой c/R. Поскольку RLc является пределом этой диаграммы, должен существовать единственный морфизм от любого другого конуса к нему. В частности, должен существовать морфизм от c к нему, потому что c — вершина конуса, определяемая категорией запятой. И этот морфизм мы и выберем в качестве η_c.



Между прочим, можно интерпретировать сам η_c как объект категории запятой $c/$R, а именно тот, который определяется парой $(Lc, \eta_c \colon c \to RLc)$. Фактически, это инициальный объект в этой категории. Если выбрать любой другой объект, скажем $(d, g \colon c \to Rd)$, то всегда можно найти морфизм $h \colon Lc \to d$, который представляет собой просто опору, проекцию в ограничивающем конусе, определяющем Lc. Это, автоматически, морфизм в c/R, поскольку следующий треугольник является коммутативным:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "\eta_c"'] \arrow[dr, "g"] & \\
RLc \arrow[r, "Rh"'] & Rd
\end{tikzcd}$$

Этот треугольник определяет η_c как морфизм конусов, от верхнего конуса с вершиной c к нижнему (ограничивающему) конусу с вершиной RLc. Мы будем использовать эту интерпретацию позже, когда приступим к обсуждению полной версии теоремы Фрейда.

Мы также можем определить коединицу сопряжения. Ее компонент в точке c является морфизмом

$$\epsilon_d : LRd \to d$$

Сначала повторяем нашу конструкцию, начиная с $c = Rd$. Мы определяем категорию запятой Rd/R и используем π_{Rd} для создания диаграммы, предел которой равен LRd. Далее выбираем ϵ_d в качестве проекции в ограничивающем конусе. Нам гарантируется, что d находится в основании конуса, потому что это образ $(d, id\colon Rd \to Rd)$ под π_{Rd}.

Чтобы завершить доказательство, нужно показать, что единица и коединица являются естественными преобразованиями и удовлетворяют тождествам треугольника.

Конец для категории запятой

Интересное понимание этой конструкции можно получить, используя исчисление концов. В предыдущем посте я говорил о (взвешенных) копределах как о ко-концах, но тот же аргумент может быть двойственно применен к пределам и концам. Например, нашу категорию запятой можно рассматривать как категорию элементов в нотации ко-конца:

$$c/R \cong \mathcal{D} \int^{d} \mathcal{C}(c, Rd)$$

Предел функтора проекции π_c по категории запятой может быть записан в нотации конца как

$$\lim_{c/R} \pi_c \cong \int_{(d,f)\colon c/R} \pi_c(d, f) \cong \int_{(d,f)\colon c/R} d$$

Это, в свою очередь, может быть переписано как взвешенный предел, где каждый d взвешивается множеством $\mathcal{C}(c, Rd)$:

$$\lim^{\mathcal{C}(c,R-)}\mathrm{Id} \cong \int_{d\colon \mathcal{D}} \mathcal{C}(c, Rd) \pitchfork d$$

Здесь, символ $\pitchfork$ — это мощность (ко-тензор), определяемая уравнением

$$\mathcal{D}\big(d', s \pitchfork d\big) \cong Set\big(s, \mathcal{D}(d', d)\big)$$

Вы можете интерпретировать $s \pitchfork d$ как произведение s копий объекта d, где s — множество. Термин „мощность“ передает идею повторного умножения. Или, поскольку мощность — это частный случай возведения в степень, можно думать о $s \pitchfork d$ как о функциональном объекте, имитирующем отображение от s к d.

Продолжая, если левый сопряженный L существует, рассматриваемый взвешенный предел можно заменить на

$$\int_{d \colon \mathcal{D}} \mathcal{D}(Lc, d) \pitchfork d$$

для которого, используя стандартное исчисление концов (см. Приложение), можно показать его изоморфность Lc. В итоге получаем:

$$\lim_{c/R} \pi_c \cong Lc$$

Условие семейства решений

Так что же насчет этих досадных проблем с размером? Одно дело — требовать наличия всех малых пределов, и совсем другое — требовать наличия больших пределов (такое требование может сузить доступные категории до предпорядков). Поскольку категория запятой может быть слишком большой, возможно, мы сможем сократить ее размерность, тщательно выбрав (малое) множество объектов из всех объектов $\mathcal{D}$. Можно взять некоторое множество индексирования I и построить семейство d_i объектов из $\mathcal{D}$, индексированных элементами I. Это не обязательно должно быть одно семейство для всех — мы можем выбрать другое семейство для каждого объекта c, для которого мы строим нашу конструкцию.

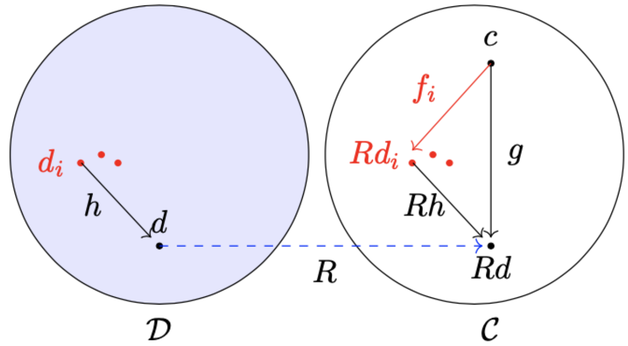
Вместо того, чтобы использовать всю категорию запятой c/R, ограничимся множеством стрелок $f_i \colon c \to Rd_i$. Но в категории запятой также имеются и морфизмы между стрелками. Фактически они являются существенными носителями структуры категории запятой. Давайте еще раз обратимся к этим морфизмам.

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Rd \arrow[rr, "Rh"'] & & Rd'
\end{tikzcd}$$

Это условие коммутативности можно интерпретировать как факторизацию g через f. Получается, что каждый морфизм g можно тривиально разложить на множители через некоторый морфизм f, выбрав $d = d'$ и $h = id_d$. Но если ограничить множители f членами семейства f_i, то не каждый $g \colon c \to Rd$ (для произвольного d) может быть автоматически факторизован. Мы должны этого потребовать, что приводит к следующему:

Условие множества решений: для каждого объекта c существует малое множество I с I-индексированным семейством объектов d_i в $\mathcal{D}$ и семейством морфизмов $f_i \colon c \to Rd_i$, такими, что каждый морфизм $g \colon c \to Rd$ может быть разложен на один из f_i. То есть существует морфизм $h \colon d_i \to d$ такой, что

$$g = Rh \circ f_i$$



Для этого утверждения имеется краткая трактовка: все категории запятых c/R допускают слабо инициальные семейства объектов. Мы вернемся к этому позже.

Теорема Фрейда

Теперь мы можем сформулировать:

Теорема Фрейда о сопряженном функторе: если $\mathcal{D}$ локально малая и малая полная категория, а функтор $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ непрерывен (с сохранением малого предела) и удовлетворяет условию множества решений, то R имеет левый сопряженный.

Ранее мы видели, что ключом к определению поточечного сопряженного слева было нахождение исходного объекта в категории запятой c/R. Проблема в том, что эта категория запятой может быть большой. Таким образом, трюк состоит в том, чтобы разделить доказательство на две части: сначала определить слабо инициальный объект, а затем построить действительно инициальный объект с помощью уравнителей. *Слабо* инициальный объект имеет морфизмы для каждого объекта в категории, но, в отличие от его сильной версии, эти морфизмы не обязательно должны быть уникальными.

Еще более слабое понятие — это слабо инициальное *множество объектов*. Это объекты, которые между собой имеют стрелки для каждого объекта в категории, но возможно, что ни один отдельный объект не имеет всех стрелок. Множество решений в теореме Фрейда является таким слабо инициальным множеством в категории запятой c/R. Поскольку мы предположили, что c/R является малой полной, можно взять произведение этих объектов и показать слабо инициальность. Затем доказательство переходит к построению инициального объекта.

Подробности доказательства можно найти в любом тексте из теории категорий или в nLab.

В дальнейшем мы увидим применение этих результатов к проблеме дефункционализации компьютерных программ.

Приложение

Чтобы показать, что

$$\int_d \mathcal{D}(Lc, d) \pitchfork d \cong Lc$$

достаточно показать, что hom-функторы от произвольного объекта d 'изоморфны

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\big(d', \int_d \mathcal{D}(Lc, d) \pitchfork d\big) \\
\cong &\int_d \mathcal{D}\big(d', \mathcal{D}(Lc, d) \pitchfork d\big) \\
\cong &\int_d Set\big(\mathcal{D}(Lc, d), \mathcal{D}(d', d)\big) \\
\cong &\ \mathcal{D}(d', Lc)
\end{aligned}$$

Я использовал непрерывность hom-функтора, определение мощности (ко-тензор) и лемму ниндзя Йонеды.